Semi-infinite path model for extremal weight modules over quantum affine algebras (Prospects of Combinatorial Representation Theory)

石井, 基裕

数理解析研究所講究録
第1945巻 2015年 93-98

Semi-infinite path model for extremal weight modules over quantum affine algebras

筑波大学・数理物質科学研究科 石井 基裕
Motohiro Ishii
Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

概要

(捩れのない) アフィンLie環のレベル・ゼロ優整ウェイトλに対して、型λの半無限Lakshmibai–Seshadriパスのなすクリスタルを導入し、これがextremalウェイトλのextremalウェイト加群の結晶基底と同型であることを示す。

1 アフィン・ルート・データ

$\mathfrak{g}$を複素数体$\mathbb{C}$上の有限次元単純Lie環、$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}} := (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$を付随する (捩れのない) アフィンLie環とする。$\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$を$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$のCartan部分環、$\{\alpha_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}, \mathbb{C})$と$\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}$をそれぞれ単純ルートと単純余ルートの集合とし、$Q^\vee := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$とおく。$\delta \in \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$を$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$の零ルートとする。$\langle -, - \rangle : \mathfrak{h}_{\mathrm{af}} \times \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^* \to \mathbb{C}$で標準的なペアリングを表す。$\mathfrak{g}$に対応する特別添字を$0 \in I_{\mathrm{af}}$とし、$I := I_{\mathrm{af}} \setminus \{0\}$とおく。$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$の基本ウェイト$\Lambda_i \in \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*\,(i \in I_{\mathrm{af}})$を固定し、$\varpi_i := \Lambda_i - \langle c, \Lambda_i \rangle \Lambda_0\,(i \in I)$とおく。$r_i \in GL(\mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)\,(i \in I_{\mathrm{af}})$を単純鏡映$r_i(\mu) := \mu - \langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle \alpha_i\,(\mu \in \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*)$とし、$W_{\mathrm{af}} := \langle r_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle$をアフィンWeyl群とする。$e \in W_{\mathrm{af}}$を単位元、$\ell : W_{\mathrm{af}} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$を長さ関数とする。$\Delta_{\mathrm{af}} := \{x\alpha_i \mid x \in W_{\mathrm{af}},\, i \in I_{\mathrm{af}}\}$、$\Delta_{\mathrm{af}}^+ := \Delta_{\mathrm{af}} \cap \sum_{i\in I_{\mathrm{af}}} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$、$\Delta := \Delta_{\mathrm{af}} \cap \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$とおく。$\beta = x\alpha_i \in \Delta_{\mathrm{af}}^+$に対して、$r_\beta := x r_i x^{-1} \in W_{\mathrm{af}}$と定める。$W := \langle r_i \mid i \in I \rangle$、$t_{\alpha_i^\vee} := r_i r_{\alpha_i+\delta}\,(i \in I)$、$t_\xi := \prod_{i\in I} t_{\alpha_i^\vee}^{k_i}\,(\xi = \sum_{i\in I} k_i \alpha_i^\vee \in Q^\vee)$と定めると、$W_{\mathrm{af}} = \{w t_\xi \mid w \in W,\, \xi \in Q^\vee\}$となる。(詳細については、[Kac90, §6]。)

2　D. Petersonの完全代表系$(W^J)_{\mathrm{af}}$

各$J \subset I$に対して、$Q_J^\vee := \bigoplus_{j\in J}\mathbb{Z}\alpha_j^\vee$、$\Delta_J := \Delta \cap \bigoplus_{j\in J}\mathbb{Z}\alpha_j$、$W_J := \langle r_j \mid j \in J\rangle$とおく。また、$(\Delta_J)_{\mathrm{af}} := \{\alpha+n\delta \mid \alpha \in \Delta_J,\, n \in \mathbb{Z}\}$、$(\Delta_J)_{\mathrm{af}}^+ := (\Delta_J)_{\mathrm{af}} \cap \Delta_{\mathrm{af}}^+$、$(W_J)_{\mathrm{af}} := \{wt_\xi \mid w \in W_J,\, \xi \in Q_J^\vee\}$とおく。Peterson ([Pet97]; [LS10] も見よ) に従って、W_{af}の部分集合$(W^J)_{\mathrm{af}} := \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid x((\Delta_J)_{\mathrm{af}}^+) \subset \Delta_{\mathrm{af}}^+\}$を導入する。$(W^J)_{\mathrm{af}}$は$W_{\mathrm{af}}/(W_J)_{\mathrm{af}}$の極小完全代表系を与える（[LS10, Lemma 10.6]）。$\Pi^J : W_{\mathrm{af}} \to (W^J)_{\mathrm{af}}$, $x_1x_2 \mapsto x_1$　$(x_1 \in (W^J)_{\mathrm{af}},\, x_2 \in (W_J)_{\mathrm{af}})$を射影とする。（詳細については、[LS10, §10] や [LNSSS13, §3]。）

3　Extremalウェイト加群

$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$を$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$に付随する量子展開環とする。$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$の整ウェイト$\lambda$に対して、$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$上のextremalウェイト$\lambda$のextremalウェイト加群$V(\lambda)$とは、$v_\lambda$によって生成され、「$v_\lambda$はウェイト$\lambda$のextremalベクトルである」という関係式によって定義される可積分加群である（[Kas94, §8]）。

以下では、$\lambda = \sum_{i\in I} m_i\varpi_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$と仮定する。$\mathcal{B}(\lambda)$を$V(\lambda)$の結晶基底とし、$u_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$を$v_\lambda \in V(\lambda)$に対応する元とする。$\mathcal{B}(\lambda)$には$W_{\mathrm{af}}$が作用する（[Kas94, §7]）。そこで、$u_x := x \cdot u_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$ $(x \in W_{\mathrm{af}})$とおく。次の命題は、Beck–中島（[BN04, Remark 4.17]）の結果（柏原の予想（[Kas02b, §13]）の解決）の系として得られる。

命題 3.1. $J = \{i \in I \mid m_i = 0\}$とすると、$(W_J)_{\mathrm{af}} = \{x \in W_{\mathrm{af}} \mid u_x = u_\lambda\}$が成り立つ。特に、$u_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$の$W_{\mathrm{af}}$-軌道は$\{u_x \mid x \in (W^J)_{\mathrm{af}}\}$と書ける。

$u_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$を含む$\mathcal{B}(\lambda)$の連結成分を$\mathcal{B}_0(\lambda)$とする。また、

$$\mathrm{Par}(\lambda) := \{\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(i)})_{i\in I} \mid \text{各}\, i \in I \,\text{について、}\rho^{(i)}\text{は長さが}\, m_i \,\text{以下の分割}\,\}$$

と定め、各 $\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(i)})_{i \in I} \in \mathrm{Par}(\lambda)$ について、

$$e_i \boldsymbol{\rho} = f_i \boldsymbol{\rho} := \mathbf{0}, \qquad \varepsilon_i(\boldsymbol{\rho}) = \varphi_i(\boldsymbol{\rho}) := -\infty, \qquad \mathrm{wt}(\boldsymbol{\rho}) := -\sum_{i \in I} |\rho^{(i)}| \delta$$

と定めることによって、$\mathrm{Par}(\lambda)$ 上に $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ 上のクリスタルの構造を定義する。

定理 3.2 ([BN04, Theorem 4.16 (i)]). $\mathcal{B}(\lambda) \cong \mathrm{Par}(\lambda) \otimes \mathcal{B}_0(\lambda)$ が成り立つ。

4 半無限 Lakshmibai–Seshadri パス

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \, (m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$、$J = \{i \in I \mid m_i = 0\}$ とする。

定義 4.1 ([Lus80, Pet97]). (i) $x = wt_\xi \in W_{\mathrm{af}} \, (w \in W, \xi \in Q^\vee)$ に対して、$\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) := \ell(w) + 2\,\mathrm{ht}(\xi)$ と定める。ただし、$\mathrm{ht}(\sum k_i \alpha_i^\vee) := \sum k_i$ である。

(ii) $x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$、$\beta \in \Delta_{\mathrm{af}}^+$ とする。$r_\beta x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ かつ $\ell^{\frac{\infty}{2}}(r_\beta x) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$ のとき、$r_\beta x \xleftarrow{\beta} x$ と書く。

定義 4.2. (i) a を有理数とする。$x \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ から $y \in (W^J)_{\mathrm{af}}$ への a-chain とは、列 $y = y_0 \xleftarrow{\beta_1} y_1 \xleftarrow{\beta_2} \cdots \xleftarrow{\beta_l} y_l = x \; (y_0, y_1, \ldots, y_l \in W_{\mathrm{af}}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l \in \Delta_{\mathrm{af}}^+)$ であって、$a\langle \beta_u^\vee, y_u \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \, (1 \leq u \leq l)$ を満たすもののことである。

(ii) $(W^J)_{\mathrm{af}}$ の元の列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ と、有理数の列 $\boldsymbol{a} = (0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = 1)$ との組 $\eta = (\boldsymbol{x}\,; \boldsymbol{a})$ が型 λ の半無限 Lakshmibai–Seshadri パスであるとは、各 $1 \leq s \leq k$ について、x_{s+1} から x_s への a_s-chain が存在することである。

$\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ を型 λ の半無限 Lakshmibai–Seshadri パス全体の集合とする。$\eta = (x_1, \ldots, x_k\,; 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 1) \in \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ を、

$$\eta(t) := \sum_{s=1}^{l-1} (a_s - a_{s-1}) x_s + (t - a_{l-1}) x_l \quad (a_{l-1} \leq t \leq a_l, \, 1 \leq l \leq k)$$

として、区分的に線型な連続写像 $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}[W_{\mathrm{af}}]$ と同一視する。ただし、$[0,1] := \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le 1\}$ であり、$\mathbb{R}[W_{\mathrm{af}}] := \bigoplus_{x \in W_{\mathrm{af}}} \mathbb{R}x$ は W_{af} に付随する実数体 $\mathbb{R}$ 上の群環である。

$\eta \in \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ と $i \in I_{\mathrm{af}}$ に対して、$H_i^\eta(t) := \langle \alpha_i^\vee, \eta(t) \cdot \lambda \rangle$ $(t \in [0,1])$ とし、$m_i^\eta := \min\{H_i^\eta(t) \mid t \in [0,1]\}$ と定める。また、$t_0^{f_i} := \max\{t \in [0,1] \mid H_i^\eta(t) = m_i^\eta\}$ と定め、$t_0^{f_i} = 1$ ならば $f_i\eta := \mathbf{0}$、$t_0^{f_i} < 1$ ならば $t_1^{f_i} := \min\{t \in [t_0^{f_i}, 1] \mid H_i^\eta(t) = m_i^\eta + 1\}$ とし、

$$(f_i\eta)(t) := \begin{cases} \eta(t) & t \in [0, t_0^{f_i}] \\ r_i \cdot \eta(t) + (e - r_i) \cdot \eta(t_0^{f_i}) & t \in [t_0^{f_i}, t_1^{f_i}] \\ \eta(t) + (e - r_i) \cdot (\eta(t_0^{f_i}) - \eta(t_1^{f_i})) & t \in [t_1^{f_i}, 1] \end{cases}$$

と定める。同様に、$t_1^{e_i} := \min\{t \in [0,1] \mid H_i^\eta(t) = m_i^\eta\}$ と定め、$t_1^{e_i} = 0$ ならば $e_i\eta := \mathbf{0}$、$t_1^{e_i} > 0$ ならば $t_0^{e_i} := \max\{t \in [0, t_1^{e_i}] \mid H_i^\eta(t) = m_i^\eta + 1\}$ とし、

$$(e_i\eta)(t) := \begin{cases} \eta(t) & t \in [0, t_0^{e_i}] \\ r_i \cdot \eta(t) + (e - r_i) \cdot \eta(t_0^{e_i}) & t \in [t_0^{e_i}, t_1^{e_i}] \\ \eta(t) + (e - r_i) \cdot (\eta(t_0^{e_i}) - \eta(t_1^{e_i})) & t \in [t_1^{e_i}, 1] \end{cases}$$

と定める。更に、$\mathrm{wt}(\eta) := \eta(1) \cdot \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$ と定める。すると、$\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ には e_i と f_i $(i \in I_{\mathrm{af}})$ を柏原作用素、$\mathrm{wt}(-)$ をウェイトとして、$U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$ 上のクリスタルの構造が定まる。

5 主結果

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$、$J = \{i \in I \mid m_i = 0\}$ とする。

定理 5.1. $\mathcal{B}(\lambda) \cong \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ が成り立つ。

以下では、定理 5.1 の証明の概略を述べる。$\eta_e := (e\,; 0 < 1) \in \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ を含む $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ の連結成分を $\mathbb{B}_0^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ とする。

命題 5.2. $\mathcal{B}_0(\lambda) \cong \mathbb{B}_0^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ が成り立つ。

証明の概略. [NS03, Theorem 3.7] や [BN04, Remark 4.17] により、写像 $\Psi_N : \mathcal{B}_0(\lambda) \hookrightarrow \mathcal{B}(\lambda)^{\otimes N}$ であって、$\Psi_N(u_\lambda) = u_\lambda^{\otimes N}$、$\Psi_N(g_i b) = g_i^N \Psi_N(b)$ ($g \in \{e, f\}, i \in I_{\mathrm{af}}, b \in \mathcal{B}_0(\lambda)$) を満たすものが（唯一つ）存在することがわかる。このとき、例えば [Kas02a, Proposition 8.3.2 (3)] と同様の方法により、各 $b \in \mathcal{B}_0(\lambda)$ に対して、ある $N_b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して、

$$\Psi_{N_b}(b) = u_{x_1} \otimes u_{x_2} \otimes \cdots \otimes u_{x_{N_b}} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_{N_b} \in (W^J)_{\mathrm{af}})$$

となることがわかる（命題 3.1 に注意）。このとき、$b \in \mathcal{B}_0(\lambda)$ に対して $(x_1, x_2, \ldots, x_{N_b}; 0 < 1/N_b < 2/N_b < \cdots < 1) \in \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ を対応させることによって、求める同型写像 $\mathcal{B}_0(\lambda) \xrightarrow{\cong} \mathbb{B}_0^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ が得られる。 □

命題 5.3. $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \cong \mathrm{Par}(\lambda) \otimes \mathbb{B}_0^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ が成り立つ。

証明の概略. まず、$\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ の各連結成分に、

$$(\Pi^J(t_{\xi_1}), \ldots, \Pi^J(t_{\xi_{s-1}}), e; a_0 < a_1 < \cdots < a_s) \quad (\xi_1, \ldots, \xi_{s-1} \in Q^\vee)$$

という形の元が唯一つ存在することを示す。このとき、各 $i \in I \setminus J$ と $0 \leq k \leq m_i - 1$ について、$a_u = k/m_i$ となる $1 \leq u \leq s$ が存在するとき、$\xi_u - \xi_{u+1}$ の $\alpha_i^\vee$ の係数を $p_k^{(i)}$ とする。そのような $1 \leq u \leq s$ が存在しないときは、$p_k^{(i)} := 0$ とする。すると、$p_k^{(i)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となることがわかる。そこで、$\rho_k^{(i)} := \sum_{l=k}^{m_i-1} p_l^{(i)}$ とおき、長さが m_i 以下の分割 $\rho^{(i)} := (\rho_1^{(i)} \geq \cdots \geq \rho_{m_i-1}^{(i)})$ を定め、$\boldsymbol{\rho} := (\rho^{(i)})_{i \in I} \in \mathrm{Par}(\lambda)$ を得る。ただし、$\rho^{(j)}$ ($j \in J$) は空分割 $\emptyset$ とする。この様にして、$\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ の連結成分全体と、$\mathrm{Par}(\lambda)$ との間に全単射が定まる。更に、$\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{Par}(\lambda)$ に対応する $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ の連結成分を $\mathbb{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ とすると、$\mathbb{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \cong \{\boldsymbol{\rho}\} \otimes \mathbb{B}_0^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ が成り立つことがわかる。従って、$\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) = \bigsqcup_{\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{Par}(\lambda)} \mathbb{B}_{\boldsymbol{\rho}}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \cong \bigsqcup_{\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{Par}(\lambda)} \{\boldsymbol{\rho}\} \otimes \mathbb{B}_0^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) = \mathrm{Par}(\lambda) \otimes \mathbb{B}_0^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ が成り立つ。 □

定理 3.2、命題 5.2、命題 5.3 を合わせると、定理 5.1 が得られる。

謝辞. 本研究は、内藤聡氏（東工大・教授）と佐垣大輔氏（筑波大・准教授）

との共同研究に基づきます。講演する機会を与えて下さった仲田研登先生にこの場を借りて御礼申し上げます。

参考文献

[BN04] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, Duke Math. J. **123** (2004), 335-402.

[Kac90] V. G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[Kas94] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, Duke Math. J. **73** (1994), 383-413.

[Kas02a] M. Kashiwara, Bases cristallines des groupes quantiques, Edited by Charles Cochet, Cours Spécialisés, Vol. 9. Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Kas02b] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, Duke Math. J. **112** (2002), 117-175.

[LNSSS13] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov–Reshetikhin crystals I: lifting the parabolic quantum Bruhat graph, to appear in Int. Math. Res. Not.; arXiv:1211.2042v2.

[LS10] T. Lam and M. Shimozono, Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian, Acta Math. **204** (2010), 49-90.

[Lus80] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns, Adv. Math. **37** (1980), 121-164.

[NS03] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra, Int. Math. Res. Not. **2003** (2003), 1731-1754.

[Pet97] D. Peterson, Quantum cohomology of G/P, Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, Spring 1997.